R E Š E NJ A

Klasifikacionog ispita iz Matematike za 2018. godinu:

1. Uprostiti izraz $I = \dfrac{x^2 - 4xy + 3y^2}{x^2 - y^2}$.

$$I = \frac{x^2 - 4xy + 3y^2}{x^2 - y^2} = \frac{x^2 - xy - 3xy + 3y^2}{(x-y)(x+y)} = \frac{x(x-y) - 3y(x-y)}{(x-y)(x+y)} =$$

$$= \frac{(x-y)(x-3y)}{(x-y)(x+y)} = \boxed{\frac{x - 3y}{x + y}} \text{ , za } x \neq \pm y.$$

2. Rastaviti na faktore polinom $P(x) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$.

$$P(x) = x^3(x^2 - 1) - (x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x^3 - 1)$$
$$= (x-1)(x+1)(x-1)(x^2 + x + 1) = \boxed{(x-1)^2(x+1)(x^2 + x + 1)} .$$

3. Uprostiti izraz $I = \dfrac{1 + x + (1-x)^{-1}}{1 + (1-x^2)^{-1}}$.

$$I = \frac{1 + x + (1-x)^{-1}}{1 + (1-x^2)^{-1}} = \frac{1 + x + \frac{1}{1-x}}{1 + \frac{1}{1-x^2}} = \frac{\frac{1 - x + x - x^2 + 1}{1-x}}{\frac{1 - x^2 + 1}{(1-x)(1+x)}} =$$

$$= \frac{(2 - x^2)(1-x)(1+x)}{(2 - x^2)(1-x)} = \boxed{1 + x} \text{ , za } x \neq \pm 1, \ x \neq \pm\sqrt{2}.$$

4. Rešiti jednačinu $\dfrac{9x - 8}{7} = 7 - \dfrac{5x + 7}{9}$.

Ako jednačinu pomnožimo sa 63 dobijamo

$9(9x - 8) = 7 \cdot 63 - 7(5x + 7) \iff 81x - 72 = 441 - 35x - 49 \iff$
$116x = 464 \iff \boxed{x = 4}$.

5. Rešiti jednačinu $\dfrac{6x - 1}{2 + x} = 3$.

Za $x \neq -2$ imamo da je $6x - 1 = 6 + 3x \iff 3x = 7 \iff \boxed{x = \dfrac{7}{3}}$.

6. Rešiti sistem jednačina $3x + 5y = 1 \ \wedge \ 3x - 2y = 8$.

Ako prvu jednačinu pomnožimo sa -1 i dodamo drugoj, dobijamo

$$-3x - 5y = -1 \ \wedge \ 3x - 2y = 8 \iff -7y = 7 \ \wedge \ 3x - 2y = 8$$
$$\iff y = -1 \ \wedge \ 3x + 2 = 8 \iff \boxed{x = 2} \wedge \boxed{y = -1} .$$

7. Rešiti jednačinu $(x-1)^2 - 4 = 0$.

$(x-1)^2 - 4 = 0 \iff (x-1)^2 - 2^2 = 0 \iff (x-1-2)(x-1+2) = 0 \iff$
$(x-3)(x+1) = 0 \iff x-3 = 0 \vee x+1 = 0 \iff \boxed{x=3} \vee \boxed{x=-1}$.

8. Za koju vrednost parametra $m \in \mathbb{R}$ kvadratna jednačina $x^2 + 6x + m = 0$ nema realna rešenja?

Jednačina nema realna rešenja ako i samo ako je $D = b^2 - 4ac < 0$, tj. ako je
$$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot m < 0 \iff 36 - 4m < 0 \iff \boxed{m > 9}.$$

9. Rešiti nejednačinu $(x-2)^2 - 9 > 0$.

$$(x-2)^2 - 3^2 = (x+1)(x-5) > 0 \iff$$
$$[(x+1 < 0 \wedge x-5 < 0) \vee (x+1 > 0 \wedge x-5 > 0)] \iff$$
$$[x < -1 \vee x > 5] \iff \boxed{x \in (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)}.$$

10. Rešiti jednačinu $(2018)^{x^2-5x+4} = 1$.

$(2018)^{x^2-5x+4} = 1 \iff (2018)^{x^2-5x+4} = (2018)^0 \iff x^2 - 5x + 4 = 0 \iff$
$\boxed{x=1} \vee \boxed{x=4}$.

11. Rešiti jednačinu $\log_3(2x+3) = 2$.

Za $2x + 3 > 0 \iff x > -\frac{3}{2}$ je
$$\log_3(2x+3) = 2 \iff 2x+3 = 3^2 \iff 2x = 6 \iff \boxed{x=3}.$$

12. Izračunati vrednost izraza $I = \log_6 2 + \log_6 3$.

$$I = \log_6 2 + \log_6 3 = \log_6(2 \cdot 3) = \log_6 6 = \boxed{1}.$$

13. Rešiti nejednačinu $\dfrac{3-x}{4-x} > 1$.

Za $x \neq 4$, je $\dfrac{3-x}{4-x} > 1 \iff \dfrac{3-x}{4-x} - 1 > 0 \iff \dfrac{3-x-4+x}{4-x} > 0 \iff \dfrac{-1}{4-x} > 0$
$$\iff 4 - x < 0 \iff x > 4 \iff \boxed{x \in (4, +\infty)}.$$

14. Rešiti jednačinu $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$.

$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \iff 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \iff (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$.
Smenom $2^x = t$ dobijamo: $t^2 - 5t + 4 = 0 \iff t = 1 \vee t = 4$, pa je:
$$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \iff 2^x = 1 \vee 2^x = 4 \iff \boxed{x=0} \vee \boxed{x=2}.$$

15. Napisati kanonski oblik parabole $y = x^2 - 4x + 3$.

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 1 \cdot \left(x + \frac{-4}{2 \cdot 1}\right)^2 + \frac{4 \cdot 1 \cdot 3 - (-4)^2}{4 \cdot 1} = \boxed{(x-2)^2 - 1}.$$

Ispitivač: Prof. dr Žarko Popović